Formale Methoden II

SS 2008

Universität Bielefeld

Teil 2, 23. April 2008

Gerhard Jäger

Übersetzung Deutsch $\Rightarrow$ Aussagenlogik

- Motivation für Übersetzung:
  1. Deutsch als Objektsprache: Übersetzung erlaubt Modellierung der Semantik des Deutschen mit den Mitteln der Logik
  2. Deutsch als Metasprache: Übersetzung hilft, den Begriff des gültigen Arguments präzise zu fassen

Ein Satz A ist genau dann eine *adäquate* Übersetzung eines Satzes A', wenn A und A' dieselben Wahrheitsbedingungen besitzen.

Übersetzung

- Übersetzung eines deutschen Satzes A besteht aus
  - einem Satz A' der Aussagenlogik, und
  - Bedingungen für die Bewertung V der Aussagenlogik
- gute Übersetzung von A ist
  - möglichst strukturreich
  - A in der Struktur möglichst ähnlich

Übersetzung: Negation

- Beispiel:
  - deutsch:

(1) Paul ist nicht klug.

  - Übersetzung:

(2) a. $\neg p$
b. p : Paul ist klug.

- Faustregel: *Wenn man einen mit Hilffe des Ausdrucks „nicht“ gebildeten Satz A der deutschen Umgangssprache problemlos mit Hilfe eines „es ist nicht der Fall, dass“-Satzes paraphrasieren kann, dann kann man A in eine Negation übersetzen.* (Beckermann 2003:137)

Übersetzung: Negation

- Paraphrase-Test hilft auch bei anderen Ausdrucksmöglichkeiten der Negation:
  - Deutsch:

(3) Franz Beckenbauer ist *kein* Musiker.

  - Paraphrase:

(4) *Es ist nicht der Fall, dass* Franz Beckenbauer ein Musiker ist.

  - Übersetzung:

(5) a. $\neg p$
b. p : Franz Beckenbauer ist ein Musiker.

Übersetzung: Negation

- Weitere Beispiele

(6) a. *Niemand* ist gescheiter als Hans.
b. Es ist nicht der Fall, dass jemand gescheiter als Hans ist.
c. $\neg p$/p : Jemand ist gescheiter als Hans.

(7) a. Fritz hat Gerda *nichts* geschenkt.
b. Es ist nicht der Fall, dass Fritz Gerda etwas geschenkt hat.
c. $\neg p$/p : Fritz hat Gerda etwas geschenkt.

(8) a. *Weder* Hans *noch* Peter sind in Bielefeld.
b. Es ist nicht der Fall, dass Hans oder Peter in Bielefeld sind.
c. $\neg p$/p : Hans oder Peter sind in Bielefeld.

Übersetzung: Negation

(9) a. Hans ist *un*vernünftig.
b. Es ist nicht der Fall, dass Hans vernünftig ist.
c. $\neg p$/p : Hans ist vernünftig.

aber:

(10) a. Hans ist unverschämt.
b. $\neq$ Es ist nicht der Fall, dass Hans verschämt ist.
c. (richtige Übersetzung:) p/p : Hans ist unverschämt.

Übersetzung: Konjunktion

(11) a. Hans ist blond und Hans ist 1,80 m groß.
b. $p \wedge q$
c. p : Hans ist blond.
d. q : Hans ist 1,80 m groß.

(12) a. Hans ist blond und 1,80 m groß.
b. (Paraphrase:) Hans ist blond und Hans ist 1,80 m groß.
c. $p \wedge q$
d. p : Hans ist blond.
e. q : Hans ist 1,80 m groß.

Übersetzung: Konjunktion

(13) a. Hans und Paul sind gute Schwimmer.
b. Hans ist ein guter Schwimmer und Paul ist ein guter Schwimmer.
c. $p \wedge q$
d. $p :$ Hans ist ein guter Schwimmer. $q :$ Paul ist ein guter Schwimmer.

- Faustregel: *Wenn man einen Satz A, der ein „und“ enthält, durch eine Satzverbindung paraphrasieren kann, in der „und“ die koordinierende Konjunktion ist, dann kann man A durch eine Konjunktion übersetzen.*

Übersetzung: Konjunktion

aber:

(14) a. Hans und Gerda sind befreundet.
b. $\neq$ Hans ist befreundet und Gerda ist befreundet.
c. (richtige Übersetzung:) p
d. p : Hans und Gerda sind befreundet.

Übersetzung: Konjunktion

- weiter Ausdrucksmöglichkeiten für Konjunktion

(15) a. Hans ist *ebenso* dumm *wie* faul.
b. Hans ist dumm und Hans ist faul.
c. $p \wedge q$
d. p : Hans ist dumm. q : Hans ist faul.

(16) a. Hans ist nicht dumm, *aber* faul.
b. Hans ist nicht dumm und Hans ist faul.
c. $\neg p \wedge q$
d. p : Hans ist dumm. q : Hans ist faul.

Übersetzung: Konjunktion

(17) a. *Obwohl* Helga mit Paul verlobt ist, liebt sie ihn nicht.
b. Helga ist mit Paul verlobt, und sie liebt ihn nicht.
c. $p \wedge \neg q$
d. p : Helga ist mit Paul verlobt. q : Helga liebt Paul.

Übersetzung: Disjunktion

- Zum Problem exklusives vs. inklusives „oder“: siehe letzte Vorlesung
- davon abgesehen verhält sich Disjunktion zu „oder“ wie Konjunktion zu „und“

(18) a. Hans ist blond oder Hans ist 1,80 m groß.
b. $p \vee q$
c. p : Hans ist blond.
d. q : Hans ist 1,80 m groß.

Übersetzung: Disjunktion

(19) a. Hans ist blond oder 1,80 m groß.
b. (Paraphrase:) Hans ist blond oder Hans ist 1,80 m groß.
c. $p \vee q$
d. p : Hans ist blond.
e. q : Hans ist 1,80 m groß.

(20) a. Hans oder Paul ist ein guter Schwimmer.
b. Hans ist ein guter Schwimmer oder Paul ist ein guter Schwimmer.
c. $p \vee q$
d. p : Hans ist ein guter Schwimmer. q : Paul ist ein guter Schwimmer.

Übersetzung: Implikation

- Implikation hat kein wirkliches Gegenstück im Deutschen
- einige grammatische Konstruktionen können näherungsweise durch Implikationen übersetzt werden
- Faustregel: *Angenommen, A ist ein deutscher Satz, der möglicherweise durch die Implikation $\varphi \rightarrow \psi$ übersetzt werden kann. Um die Adäquatheit dieser Übersetzung zu testen, mache man sich klar, unter welchen Bedingungen A falsch ist. Wenn die Übersetzung korrekt ist, dann muss unter diesen Bedingungen, und nur dann, φ wahr und ψ falsch sein.*

Übersetzung: Implikation

(21) a. *Wenn* Fritz der Vater von Paul ist, *dann* ist Fritz älter als Paul.
b. $p \rightarrow q$
c. p : Fritz ist der Vater von Paul.
d. q : Fritz ist älter als Paul.

(22) a. Hans kommt *nur* zur Party, *wenn* Helga kommt.
b. $p \rightarrow q$
c. p : Hans kommt zur Party.
d. q : Helga kommt zur Party.

Übersetzung: Implikation

(23) a. Dass x gerade ist, ist eine *notwendige Bedingung* dafür, dass x durch 4 teilbar ist.

b. $p \rightarrow q$

c. $p : x$ ist durch 4 teilbar.

d. $q : x$ ist gerade.

(24) a. Dass x durch 4 teilbar ist, ist eine *hinreichende Bedingung* dafür, dass x gerade ist.

b. $p \rightarrow q$

c. $p : x$ ist durch 4 teilbar.

d. $q : x$ ist gerade.

Übersetzung: Äquivalenz

(25) a. Hans kommt dann und nur dann zur Party, wenn Paul kommt.
b. $p \leftrightarrow q$
c. p : Hans kommt zur Party.
d. q : Paul kommt zur Party.

(26) a. Hans kommt genau dann zur Party, wenn Paul kommt.
b. $p \leftrightarrow q$
c. p : Hans kommt zur Party.
d. q : Paul kommt zur Party.

Übersetzung: Äquivalenz

(27)
a. Dass x in der Dezimaldarstellung auf die Ziffer 0 endet, ist eine *notwendige und hinreichende Bedingung* dafür, dass x durch 10 teilbar ist.
b. $p \leftrightarrow q$
c. $p : x$ endet in der Dezimaldarstellung auf die Ziffer 0.
d. $q : x$ ist durch 10 teilbar.

Tautologien

Definition 3 (Tautologie) *Eine aussagenlogische Formel* φ *ist eine aussagenlogische* ***Tautologie****, formal notiert als*

$$\Rightarrow \varphi$$

genau dann wenn für alle Bewertungsfunktionen V *gilt:*

$$V(\varphi) = 1$$

Tautologien

- Tautologien heißen auch *logisch wahr*.
- Beispiele für Tautologien:

$$p \vee \neg p, \neg(p \wedge \neg p), p \rightarrow q \rightarrow p, p \rightarrow \neg\neg p, p \rightarrow p \vee q, \ldots$$

- Ob eine Formel logisch wahr ist, kann durch Wahrheitswerttafeln entschieden werden. Logisch wahre Formeln sind unter jeder Bewertungsfunktion, also in jeder Zeile wahr.

Tautologien

	p	q	$q \longrightarrow p$	$p \longrightarrow q \longrightarrow p$
V_1	1	1		
V_2	1	0		
V_3	0	1		
V_4	0	0		

Tautologien

	p	q	$q \longrightarrow p$	$p \longrightarrow q \longrightarrow p$
V_1	1	1	1	
V_2	1	0	1	
V_3	0	1	0	
V_4	0	0	1	

Tautologien

	p	q	$q \longrightarrow p$	$p \longrightarrow q \longrightarrow p$
V_1	1	1	1	1
V_2	1	0	1	1
V_3	0	1	0	1
V_4	0	0	1	1

Kontradiktionen

Definition 4 (Kontradiktion) *Eine aussagenlogische Formel φ ist eine aussagenlogische* ***Kontradiktion*** *genau dann wenn für alle Bewertungsfunktionen V gilt:*

$$V(\varphi) = 0$$

- Kontradiktionen heißen auch *logisch falsch*.
- Beispiele für Kontradiktionen:

$$p \wedge \neg p, \neg(p \vee \neg p), (p \rightarrow \neg p) \wedge p, p \leftrightarrow \neg p, ...$$

- Ob eine Formel logisch falsch ist, kann ebenfalls durch Wahrheitswerttafeln entschieden werden. Logisch falsche Formeln sind unter jeder Bewertungsfunktion, also in jeder Zeile falsch.

Kontradiktionen

	p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow \neg p) \wedge p$
V_1	1			
V_2	0			

Kontradiktionen

	p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow \neg p) \wedge p$
V_1	1	0		
V_2	0	1		

Kontradiktionen

	p	$\neg p$	$p \longrightarrow \neg p$	$(p \longrightarrow \neg p) \land p$
V_1	1	0	0	
V_2	0	1	1	

Kontradiktionen

	p	$\neg p$	$p \longrightarrow \neg p$	$(p \longrightarrow \neg p) \wedge p$
V_1	1	0	0	0
V_2	0	1	1	0

Tautologien und Kontradiktionen

Theorem 1 *Wenn φ eine Tautologie ist, dann ist $\neg\varphi$ eine Kontradiktion.*

Beweis: Angenommen die Prämisse ist korrekt und φ ist eine Tautologie. Sei V eine beliebige Bewertungsfunktion. Per Annahme gilt

$$V(\varphi) = 1$$

Daraus folgt, dass

$$V(\neg\varphi) = 0$$

aufgrund der Semantik der Negation. Da über V keine besonderen Annahmen gemacht wurden, gilt für alle V, dass $V(\neg\varphi) = 0$. Damit ist $\neg\varphi$ per definitionem eine Kontradiktion. $\dashv$

Tautologien und Kontradiktionen

Theorem 2 *Wenn φ eine Kontradiktion ist, dann ist $\neg\varphi$ eine Tautologie.*

Beweis: Angenommen die Prämisse ist korrekt und φ ist eine Kontradiktion. Sei V eine beliebige Bewertungsfunktion. Per Annahme gilt

$$V(\varphi) = 0$$

Daraus folgt, dass

$$V(\neg\varphi) = 1$$

aufgrund der Semantik der Negation. Da über V keine besonderen Annahmen gemacht wurden, gilt für alle V, dass $V(\neg\varphi) = 1$. Damit ist $\neg\varphi$ per definitionem eine Tautologie. $\dashv$

Logische Äquivalenz

Definition 5 (Logische Äquivalenz) *Zwei Formeln* φ *und* ψ *sind **logisch äquivalent**, formal notiert als*

$$\varphi \Leftrightarrow \psi$$

genau dann wenn für alle Bewertungsfunktionen V *gilt:*

$$V(\varphi) = V(\psi)$$

- Beachte: „**Logische** Äquivalenz“ ist ein meta-sprachlicher Begriff, während „Äquivalenz“ i.S.v. „$\leftrightarrow$“ ein objekt-sprachlicher Operator ist.
- Logische Äquivalenz lässt sich ebenfalls mit Hilfe von Wahrheitswerttafeln entscheiden.

Logische Äquivalenz

	p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
V_1	1	1	1				
V_2	1	1	0				
V_3	1	0	1				
V_4	1	0	0				
V_5	0	1	1				
V_6	0	1	0				
V_7	0	0	1				
V_8	0	0	0				

Also:

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Logische Äquivalenz

	p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
V_1	1	1	1	1			
V_2	1	1	0	1			
V_3	1	0	1	0			
V_4	1	0	0	0			
V_5	0	1	1	0			
V_6	0	1	0	0			
V_7	0	0	1	0			
V_8	0	0	0	0			

Also:

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Logische Äquivalenz

	p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
V_1	1	1	1	1	1		
V_2	1	1	0	1	0		
V_3	1	0	1	0	0		
V_4	1	0	0	0	0		
V_5	0	1	1	0	1		
V_6	0	1	0	0	0		
V_7	0	0	1	0	0		
V_8	0	0	0	0	0		

Also:

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Logische Äquivalenz

	p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
V_1	1	1	1	1	1	1	
V_2	1	1	0	1	0	0	
V_3	1	0	1	0	0	0	
V_4	1	0	0	0	0	0	
V_5	0	1	1	0	1	0	
V_6	0	1	0	0	0	0	
V_7	0	0	1	0	0	0	
V_8	0	0	0	0	0	0	

Also:

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Logische Äquivalenz

	p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
V_1	1	1	1	1	1	1	1
V_2	1	1	0	1	0	0	0
V_3	1	0	1	0	0	0	0
V_4	1	0	0	0	0	0	0
V_5	0	1	1	0	1	0	0
V_6	0	1	0	0	0	0	0
V_7	0	0	1	0	0	0	0
V_8	0	0	0	0	0	0	0

Also:

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Logische Äquivalenz

Theorem 3 *φ und ψ sind genau dann logisch äquivalent wenn $\varphi \leftrightarrow \psi$ eine Tautologie ist.*

Beweis:

- *Vorwärts:* Angenommen $\varphi \Leftrightarrow \psi$. Sei V eine beliebige Bewertungsfunktion. Aufgrund der Annahme gilt, dass $V(\varphi) = V(\psi)$. Also gilt entweder $V(\varphi) = V(\psi) = 1$ oder $V(\varphi) = V(\psi) = 0$. In beiden Fällen gilt auf Grund der Semantik der Äquivalenz, dass $V(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$. Also ist $\varphi \leftrightarrow \psi$ eine Tautologie.

Logische Äquivalenz

- *Rückwärts:* Angenommen, $\varphi \leftrightarrow \psi$ ist eine Tautologie. Sei V eine beliebige Bewertungsfunktion. Wir unterscheiden zwei mögliche Fälle:
  - $V(\varphi) = 1$. Auf Grund der Semantik der Äquivalenz gilt dann: $V(\psi) = 1$.
  - $V(\varphi) = 0$. Auf Grund der Semantik der Äquivalenz gilt dann: $V(\psi) = 0$.

  In beiden Fällen gilt $V(\varphi) = V(\psi)$. Also sind φ und ψ logisch äquivalent. $\dashv$