

# *Formale Methoden II*

SS 2008

*Universität Bielefeld*

Teil 3, 29. April 2008

**Gerhard Jäger**

# Logische Folgerung

**Definition 6 (Folgerung)** *Eine Formel  $\varphi$  folgt logisch aus einer Menge von Formeln  $M$ , formal notiert als*

$$M \Rightarrow \varphi$$

*genau dann wenn für alle Bewertungsfunktionen  $V$  gilt:  
Wenn für alle  $\psi \in M$ :*

$$V(\psi) = 1$$

*dann*

$$V(\varphi) = 1$$

# Logische Folgerung

- Wenn  $M \Rightarrow \varphi$ , dann spricht man auch von einem **gültigen Argument**
- $M$  heißt **Prämissenmenge** und  $\varphi$  **Konklusion**
- Tautologien folgen logisch aus der leeren Menge
- Beispiele für gültige Argumente

$$p, q \Rightarrow p$$

$$p, q \Rightarrow p \wedge q$$

$$p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$$

$$p, q \Rightarrow q \vee r$$

$$p \Rightarrow q \rightarrow p$$

$$p, p \rightarrow q \Rightarrow q$$

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$$

# Logische Folgerung

- bei endlichem  $M$  ist Folgerung durch Wahrheitstafel-Methode entscheidbar
- in jeder Zeile, in der jede Prämisse den Eintrag „1“ hat, muss auch die Konklusion den Eintrag „1“ haben.
- **Beispiel:** „Modus Ponens“

$$p, p \rightarrow q \Rightarrow q$$

# Logische Folgerung

	$p$	$q$	$p \rightarrow q$
$V_1$	1	1	1
$V_2$	1	0	0
$V_3$	0	1	1
$V_4$	0	0	1

# Logische Folgerung

	$p$	$q$	$p \rightarrow q$
$V_1$	1	1	1
$V_2$	1	0	0
$V_3$	0	1	1
$V_4$	0	0	1

Nur in der ersten Zeile sind alle Prämissen wahr, und dort ist auch die Konklusion wahr.

# Das Deduktionstheorem

**Theorem 4** Für beliebige Formeln  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$ ,

$$M, \varphi_1, \dots, \varphi_n \Rightarrow \psi$$

genau dann wenn

$$M \Rightarrow \varphi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \psi$$

*Beweis:* Wir beweisen das Theorem via vollständiger Induktion über  $n$ .

- *Induktionsbasis*  $n = 0$ : Das Theorem gilt offensichtlich.

# Das Deduktionstheorem

● *Induktionsschritt vorwärts:* Angenommen, das Theorem gilt für  $n$ . Wir müssen zeigen, dass es dann auch für  $n + 1$  gilt. Nehmen wir weiterhin an, dass für alle  $\xi \in M$ ,  $V(\xi) = 1$  für eine beliebige Bewertungsfunktion  $V$ . Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:

1.  $V(\varphi_1) = 0$ . Nach der Semantik der Implikation gilt dann  $V(\varphi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \varphi_{n+1} \rightarrow \psi) = 1$ .
2.  $V(\varphi_1) = 1$ . Aus der Induktionsannahme folgt, dass  $M, \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \varphi_{n+1} \rightarrow \psi$ . Daher gilt auch  $V(\varphi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \varphi_{n+1} \rightarrow \psi) = 1$ . Nach der Semantik der Implikation gilt daher  $V(\varphi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \varphi_{n+1} \rightarrow \psi) = 1$ .

Aus der Annahme, dass  $V$  die Prämissen verifiziert, folgt also in jedem Fall dass es auch die Konklusion verifiziert.



# Das Deduktionstheorem

- *Induktionsschritt rückwärts:* Angenommen das Theorem gilt für  $n$ . Nehmen wir weiterhin an, dass  $M \Rightarrow \varphi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_{n+1} \rightarrow \psi$ . Außerdem nehmen wir an, dass für alle  $\xi \in M : V(\xi) = 1$ , sowie  $V(\varphi_i) = 1$  für  $1 \leq i \leq n + 1$ . Nach Induktionsannahme gilt:  $M, \varphi_1, \dots, \varphi_n \Rightarrow \varphi_{n+1} \rightarrow \psi$ . Also  $V(\varphi_{n+1} \rightarrow \psi) = 1$ . Nach der Semantik der Implikation gilt dann auch  $V(\psi) = 1$ .

⊢

# Deduktionstheorem

- Deduktionstheorem liegt der Methode des **konditionalen Beweises** zu Grunde
- Um zu beweisen, dass *Wenn  $A$ , dann  $B$*  logisch wahr ist (bzw. aus weiteren Hintergrundprämissen folgt), nimmt man
  - $A$  als zusätzliche Prämisse an, und
  - beweist mit Hilfe dieser Prämisse  $B$ .

# Die Wahrheitsbaum-Methode

- Wahrheitstafel-Methode häufig umständlich und redundant
- Alternative: **indirekter Beweis**
- Man startet von der Annahme, dass eine Folgerung ungültig ist, und versucht, einen Widerspruch abzuleiten
- Folgerung ist ungültig, wenn für wenigstens eine Bewertungsfunktion  $V$  gilt, dass alle Prämissen wahr und die Konklusion falsch ist.

# Die Wahrheitsbaum-Methode

● Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss  $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$  wahr sein

# Die Wahrheitsbaum-Methode

● Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss  $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$  wahr sein
- also muss  $p$  wahr sein und  $q \rightarrow r \vee p$  falsch

# Die Wahrheitsbaum-Methode

● Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss  $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$  wahr sein
- also muss  $p$  wahr sein und  $q \rightarrow r \vee p$  falsch
- also muss  $\neg(q \rightarrow r \vee p)$  wahr sein

# Die Wahrheitsbaum-Methode

● Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss  $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$  wahr sein
- also muss  $p$  wahr sein und  $q \rightarrow r \vee p$  falsch
- also muss  $\neg(q \rightarrow r \vee p)$  wahr sein
- also muss  $q$  wahr sein und  $r \vee p$  falsch

# Die Wahrheitsbaum-Methode

● Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss  $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$  wahr sein
- also muss  $p$  wahr sein und  $q \rightarrow r \vee p$  falsch
- also muss  $\neg(q \rightarrow r \vee p)$  wahr sein
- also muss  $q$  wahr sein und  $r \vee p$  falsch
- also muss  $\neg(r \vee p)$  wahr sein



# Die Wahrheitsbaum-Methode

## ● Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss  $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$  wahr sein
- also muss  $p$  wahr sein und  $q \rightarrow r \vee p$  falsch
- also muss  $\neg(q \rightarrow r \vee p)$  wahr sein
- also muss  $q$  wahr sein und  $r \vee p$  falsch
- also muss  $\neg(r \vee p)$  wahr sein
- also müssen sowohl  $r$  als auch  $p$  falsch sein

# Die Wahrheitsbaum-Methode

- Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss  $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$  wahr sein
- also muss  **$p$  wahr** sein und  $q \rightarrow r \vee p$  falsch
- also muss  $\neg(q \rightarrow r \vee p)$  wahr sein
- also muss  $q$  wahr sein und  $r \vee p$  falsch
- also muss  $\neg(r \vee p)$  wahr sein
- also müssen sowohl  $r$  als auch  **$p$  falsch** sein
- **Widerspruch**
- Annahme, dass die Formel kein Theorem ist, hat zu Widerspruch geführt
- also ist die Formel ein Theorem

# Die Wahrheitsbaum-Methode

- lässt sich schematisch in Baum-Form darstellen

1.	$\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$	(A)
2.	$p$	(1)
3.	$\neg(q \rightarrow r \vee p)$	(1)
4.	$q$	(3)
5.	$\neg(r \vee p)$	(3)
6.	$\neg r$	(5)
7.	$\neg p$	(5)
8.	<b>x</b>	(1, 7)

- degenerierter Baum, da nicht verzweigend
- i. Allg. können Wahrheitsbäume verzweigen

# Die Wahrheitsbaum-Methode

- Zeile besteht aus
  1. Zeilennummer
  2. Formel, die als wahr angenommen wird, und
  3. Zeilennummer, aus der die aktuelle Zeile abgeleitet wurde (erste Zeile ist „Annahme“ (A))
- Wenn in einem Ast
  - die Formel  $\varphi$  steht und oberhalb der aktuellen Zeile die Formel  $\neg\varphi$ , oder
  - die Formel  $\neg\varphi$  und oberhalb der aktuellen Zeile die Formel  $\varphi$ ,dann wird dieser Ast mit „x“ als widersprüchlich gekennzeichnet
- Wahrheitsbaum ist **geschlossen, wenn alle Äste widersprüchlich sind**

# Weiteres Beispiel

1.  $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r)$  (A)
2.  $p \rightarrow q$  (1)
3.  $\neg((q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r)$  (1)
4.  $q \rightarrow r$  (3)
5.  $\neg(p \rightarrow r)$  (3)
6.  $p$  (5)
7.  $\neg r$  (5)

8.  $\neg p$  (2)  
x (6, 8)

9.  $q$  (2)

10.  $\neg q$  (4)  
x (9, 10)

11.  $r$  (4)  
x (7, 11)

# Weiteres Beispiel

- alle Äste sind geschlossen
- intuitiv: Fallunterscheidungen, aber jeder Fall führt zu Widerspruch
- damit ist Annahme widerlegt, also das ursprüngliche Theorem bewiesen

# Wahrheitsbaum-Kalkül

- Verfahren kann z.T. mechanisiert werden
- jede komplexe Formel führt auf genau definierte Weise zu Erweiterung des Wahrheits-Baumes

# Regeln

- doppelte Negation

$$(DN) \quad \neg\neg\varphi \\ \varphi$$

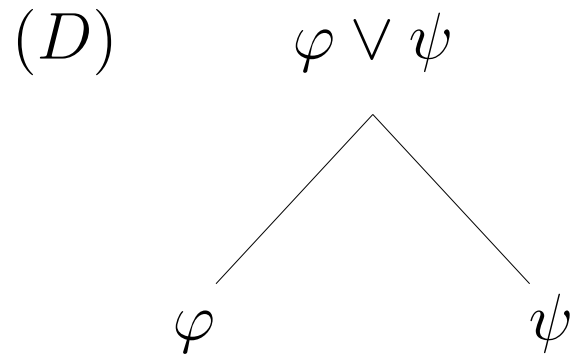
- Konjunktion

$$(K) \quad \varphi \wedge \psi \\ \varphi \\ \psi$$

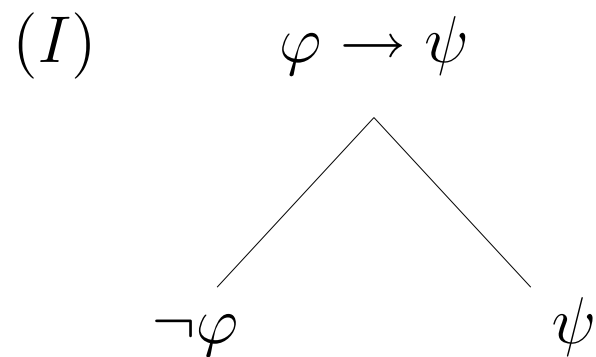


# Regeln

- Disjunktion

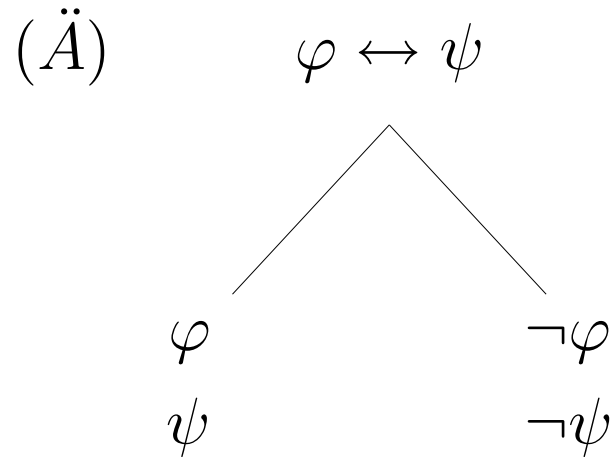


- Implikation

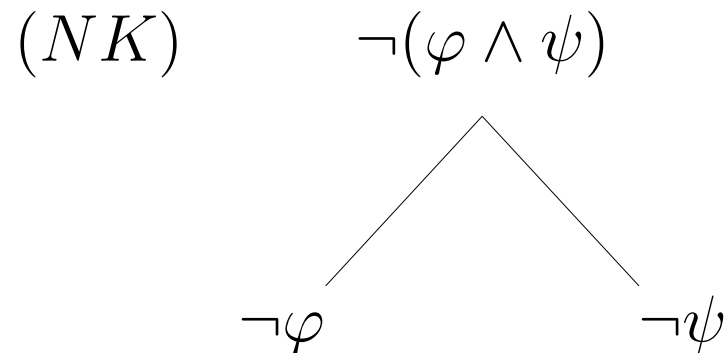


# Regeln

- Äquivalenz



- Negation + Konjunktion



# Regeln

## ● Negation + Disjunktion

$$(ND) \quad \neg(\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\varphi$$

$$\neg\psi$$

## ● Negation + Implikation

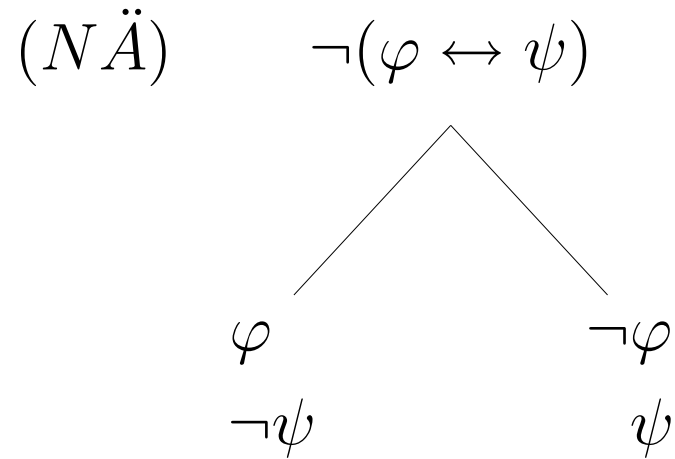
$$(NI) \quad \neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\varphi$$

$$\neg\psi$$

# Regeln

- Negation + Äquivalenz



# Wahrheitsbaum-Kalkül

**Theorem 5** *Eine Formel  $\varphi$  der Aussagenlogik ist genau dann logisch wahr, wenn jeder Ast eines Wahrheitsbaums der Negation  $\neg\varphi$  dieses Satzes, der nur mit Hilfe der zuvor angegebenen Regeln entwickelt wurde, mit einem „x“ geschlossen werden kann, da in ihm ein Formel sowohl in negierter als auch in nicht-negierter Form vorkommt.*

# Faustregeln

- Man sollte immer zuerst versuchen, nicht verzweigende Regeln anzuwenden.
- Bei der Anwendung von verzweigenden Regeln sollte man darauf achten, dass man möglichst einen Ast sofort schließen kann.
- Die Entwicklung doppelt negierter atomarer Formeln bringt in der Regel keinen Vorteil; doppelt negierte Atome sollten daher nur entwickelt werden, wenn das zum Abschluss eines Astes nötig ist.