

# *Formale Methoden II*

SS 2008

*Universität Bielefeld*

Teil 8, 11. Juni 2008

**Gerhard Jäger**

# Beispiele

Anmerkung: wenn der Wahrheitswert einer Formel in einem Modell nicht von der Belegungsfunktion abhängt, kann die Belegungsfunktion weggelassen werden. Statt  $[\varphi]_g^M$  schreibt man also einfach  $[\varphi]^M$ .

- $[\exists x \mathit{Animal}(x)]^M$
- $[\exists x (\mathit{Animal}(x) \wedge \mathit{Run}(x))]^M$
- $[\exists x (\mathit{Animal}(x) \rightarrow \mathit{Run}(x))]^M$
- $[\forall x (\mathit{Animal}(x) \rightarrow \mathit{Run}(x))]^M$
- $[\exists x \mathit{Scream}(x)]^M$

# Beispiele

Anmerkung: wenn der Wahrheitswert einer Formel in einem Modell nicht von der Belegungsfunktion abhängt, kann die Belegungsfunktion weggelassen werden. Statt  $[\varphi]_g^M$  schreibt man also einfach  $[\varphi]^M$ .

- $[\exists x \mathit{Animal}(x)]^M = 1$
- $[\exists x (\mathit{Animal}(x) \wedge \mathit{Run}(x))]^M = 1$
- $[\exists x (\mathit{Animal}(x) \rightarrow \mathit{Run}(x))]^M = 1$
- $[\forall x (\mathit{Animal}(x) \rightarrow \mathit{Run}(x))]^M = 0$
- $[\exists x \mathit{Scream}(x)]^M = 0$

# Unentscheidbarkeit

- für endliche Modell lässt sich Wahrheitswert immer bestimmen
- in unendlichen Modellen Bestimmung des Wahrheitswerts nicht immer möglich
  - Beispiel: Primzahlzwillinge
  - Modell: System der natürlichen Zahlen
  - Wahrheitswert der folgenden Formel (mit der intendierten Interpretation der Prädikate) ist unbekannt:

$$\forall x \exists y \exists z (x < y \wedge \textit{Primzahl}(y) \wedge \textit{Primzahl}(z) \wedge \textit{Plus}(y, 2, z))$$

# Folgerung

- wesentlich für Logik ist Begriff der **Folgerung**
- Wahrheit ist quasi ein Hilfsbegriff
- Wie lässt sich prädikatenlogische Folgerung definieren?

# Logische Folgerung

**Definition 1 (Logische Folgerung)** *Aus den Prämissen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  folgt die Konklusion  $\psi$  logisch – formal notiert als*

$$\varphi_1 \dots, \varphi_n \Rightarrow \psi$$

*genau dann wenn für alle Modelle  $M$  und alle Belegungsfunktionen  $g$  gilt: wenn  $[\varphi_i]_g^M = 1$  für alle  $1 \leq i \leq n$ , dann gilt auch  $[\psi]_g^M = 1$ .*

- die aussagenlogischen Definitionen für die anderen logischen Eigenschaften/Relationen lassen sich analog auf die Prädikatenlogik übertragen:

# Tautologien

**Definition 2 (Tautologie)** *Eine Formel  $\varphi$  ist eine typentheoretische **Tautologie**, formal notiert als*

$$\Rightarrow \varphi$$

*genau dann wenn für alle Modelle  $M$  und alle Belegungsfunktionen  $g$  gilt:*

$$[\varphi]_g^M = 1$$



# Kontradiktionen

**Definition 3 (Kontradiktion)** *Eine Formel  $\varphi$  ist eine typentheoretische **Kontradiktion** genau dann wenn für alle Modelle  $M$  und alle Belegungsfunktionen  $g$  gilt:*

$$[\varphi]_g^M = 0$$

# Logische Äquivalenz

**Definition 4 (Logische Äquivalenz)** *Zwei Formeln  $\varphi$  und  $\psi$  sind **logisch äquivalent**, formal notiert als*

$$\varphi \Leftrightarrow \psi$$

*genau dann wenn für alle Modelle  $M$  und alle Belegungsfunktionen  $g$  gilt:*

$$[\varphi]_g^M = [\psi]_g^M$$

- die metalogischen Theoreme der Aussagenlogik (siehe Folien Teil 2 und Teil 3) gelten auch für die Prädikatenlogik
- wie zeigt man, dass z.B. eine Formel eine Tautologie ist?
- Beispiel:

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists y P(y)$$

- zwei *semantische Methoden*:
  - Umformung in eine mengentheoretische Aussage
  - Versuch, ein Gegenmodell zu konstruieren

# Reduktion auf Mengentheorie

zu beweisen ist:

• für alle  $M$  und  $g$ :  $[\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists y P(y)]_g^M = 1$

schrittweise Umformung (Anwendung der Definitionen)

1. für alle  $M$  und  $g$ :  $\max([1 - [\forall x \neg P(x)]_g^M, [\neg \exists y P(y)]_g^M]) = 1$

2. für alle  $M$  und  $g$ :

$$\max([1 - \min_{a \in E}([\neg P(x)]_{g[a/x]}^M), 1 - [\exists y P(y)]_g^M]) = 1$$

3. für alle  $M$  und  $g$ :

$$\max([1 - \min_{a \in E}(1 - [P(x)]_{g[a/x]}^M), 1 - [\max_{b \in E}([P(y)]_{g[b/y]}^M)]) = 1$$

4. für alle  $M$  und  $g$ :

$$\max([\max_{a \in E}([P(x)]_{g[a/x]}^M), 1 - [\max_{b \in E}([P(y)]_{g[b/y]}^M)]) = 1$$

# Reduktion auf Mengentheorie

- die letzte Zeile besagt praktisch: für einen bestimmten Wahrheitswert  $\alpha$ :

$$\max(\alpha, 1 - \alpha) = 1$$

- das ist natürlich immer wahr
- damit ist die ursprüngliche Formel eine Tautologie
- *Methode ist umständlich manchmal nicht sehr erhellend*

# Gegenmodell-Methode

- alternative Methode: Konstruktion eines Gegenmodells
- Idee: indirekter Beweis
  - angenommen, die Formel ist keine Tautologie
  - das bedeutet, dass es ein Modell und eine Belegungsfunktion gibt, die die Formel falsch machen
  - man versucht, ein solche Modell (samt zugehöriger Belegungsfunktion) zu konstruieren
  - wenn dieser Versuch auf einen Widerspruch führt, muss die Formel eine Tautologie sein

# Gegenmodell-Methode

- Angenommen: es gibt  $M$  und  $g$ , so dass  $[\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists y P(y)]_g^M = 0$
- Also:  $[\forall x \neg P(x)]_g^M = 1$  und  $\neg \exists y P(y)]_g^M = 0$
- Also:  $[\forall x \neg P(x)]_g^M = 1$  und  $[\exists y P(y)]_g^M = 1$
- Also:  $\min_{a \in E}([\neg P(x)]_{g[a/x]}^M) = 1$  und  $\max_{b \in E}([P(y)]_{g[b/y]}^M) = 1$
- Also:  $\min_{a \in E}(1 - [P(x)]_{g[a/x]}^M) = 1$  und  $\max_{b \in E}([P(y)]_{g[b/y]}^M) = 1$
- Also:  $\max_{a \in E}([P(x)]_{g[a/x]}^M) = 0$  und  $\max_{b \in E}([P(y)]_{g[b/y]}^M) = 1$ : **Widerspruch**

# Gegenmodell-Methode

- Beispiel für Nicht-Tautologie:

$$\forall x \exists y Rxy$$

- Annahme: es gibt (Gegen-)Modell  $M$  und Belegung  $g$  so dass:

- $[\forall x \exists y Rxy]_g^M = 0$

- also:  $\min_{a \in E} [\exists y Rxy]_{g[a/x]}^M = 0$

- also: für ein  $a \in E$ :  $[\exists y Rxy]_{g[a/x]}^M = 0$

- also:  $\max_{b \in E} [Rxy]_{g[a/x][b/y]}^M = 0$

- also: für alle  $b \in E$ :  $[Rxy]_{g[a/x][b/y]}^M = 0$

- also: für alle  $b \in E$ :  $\langle a, b \rangle \notin F(R)$



# Gegenmodell-Methode

- einfachstes Modell, dass diese Bedingung erfüllt:
  - $M = \langle E, F \rangle$
  - $E = \{a\}$
  - $F(R) = \emptyset$
- Gegenmodell-Methode kann bis zu gewissem Grad mechanisiert werden:
- **Wahrheitsbaum-Methode für Prädikatenlogik**

# Wahrheitsbaum-Kalkül für PL

- Alle Regeln des aussagenlogischen Wahrheitsbaum-Kalküls bleiben gültig
- es kommen vier neue Regeln hinzu, zwei pro Quantor

# Regeln

- Allquantor

$$\begin{array}{l} (\forall) \quad \forall x \varphi \\ \quad \quad [c/x] \varphi \end{array}$$

wobei  $c$  eine beliebige Konstante ist, die im selben Ast **vorkommt**. Wenn in dem Ast noch keine Konstante vorkommt, kann  $c$  frei gewählt werden.

- Existenzquantor

$$\begin{array}{l} (\exists) \quad \exists x \varphi \\ \quad \quad [c/x] \varphi \end{array}$$

wobei  $c$  eine beliebige Konstante ist, die im selben Ast **nicht vorkommt**.

# Regeln

- Negation + Allquantor

$$(Neg + \forall) \quad \neg \forall x \varphi \\ [c/x] \neg \varphi$$

wobei  $c$  eine Konstante ist, die weiter oben im selben Ast **nicht vorkommt**

- Negation + Existenzquantor

$$(Neg + \exists) \quad \neg \exists x \varphi \\ [c/x] \neg \varphi$$

wobei  $c$  eine beliebige Konstante ist, die im selben Ast **vorkommt**. Wenn in dem Ast noch keine Konstante vorkommt, kann  $c$  frei gewählt werden.

# Regeln

- Die Regeln  $(\exists)$  sowie  $(\neg\forall)$  dürfen auf eine Formel nur einmal angewandt werden.
- Die Regeln  $(\forall)$  sowie  $(\neg\exists)$  können für jede Konstante im jeweiligen Ast einmal angewandt werden
- Faustregel: wenn man die Wahl hat, immer zuerst  $(\exists)$  und  $(\neg\forall)$  anwenden, erst dann  $(\forall)$  bzw.  $(\neg\exists)$

# Beispiele

1.  $\neg(\forall x\neg Px \rightarrow \neg\exists xPx)$  (A)
2.  $\forall x\neg Px$  (1)
3.  $\neg\neg\exists xPx$  (1)
4.  $\exists xPx$  (3)
5.  $Pa$  (4)
6.  $\neg Pa$  (2)
7.  $\mathbf{x}$  (5, 6)

Die Annahme, dass  $\forall x\neg Px \rightarrow \neg\exists xPx$  in einem Modell falsch, die Negation  $\neg(\forall x\neg Px \rightarrow \neg\exists xPx)$  also wahr ist, hat zu einem Widerspruch geführt. Also ist die erstgenannte Formel eine Tautologie.

# Beispiele

1.  $\neg \forall x \exists y Rxy$  (A)
2.  $\neg \exists y Ray$  (1)
3.  $Raa$  (2)

Der Ast bleibt offen, obwohl keine Regeln mehr angewandt werden können. Die Formel  $\forall x \exists y Rxy$  ist also keine Tautologie.

# Folgerungen und Wahrheitsbäume

- logische Folgerungen können ebenfalls im Wahrheitsbaum-Kalkül bewiesen werden
- analog zur Aussagenlogik muss für einen indirekten Beweis einer Folgerung angenommen werden, dass
  - die Prämissen alle wahr sind, und
  - die Konklusion falsch ist
- also beginnt ein Wahrheitsbaum für eine Folgerung mit den Prämissen sowie der Negation der Konklusion als Annahmen



# Beispiele

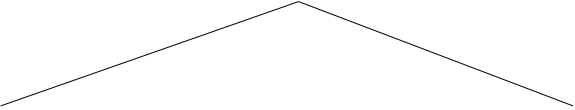
$$\forall x P(x) \Rightarrow \forall y P(y)$$

1.  $\forall x P(x)$  (A)
2.  $\neg \forall y P(y)$  (A)
3.  $\neg P(a)$  (2)
4.  $P(a)$  (1)
5. **x** (3, 4)

# Beispiele

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$$

1.  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  (A)
2.  $\neg(\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x))$  (A)
3.  $\forall xP(x)$  (2)
4.  $\neg\forall xQ(x)$  (2)
5.  $\neg Q(a)$  (4)
6.  $P(a)$  (3)
7.  $P(a) \rightarrow Q(a)$  (1)

- 
8.  $\neg P(a)$  (7)  
**x** (6, 8)
  9.  $Q(a)$  (7)  
**x** (5, 9)

# Beispiele

$$\exists x P(x) \not\Rightarrow P(a)$$

1.  $\exists x P(x)$  (A)
  2.  $\neg P(a)$  (A)
  3.  $P(a)$  (1)
- x (2, 3)

**FALSCH!!**

# Beispiele

$$\exists x P(x) \not\Rightarrow P(a)$$

1.  $\exists x P(x)$  (A)
2.  $\neg P(a)$  (A)
3.  $P(b)$  (1)

**RICHTIG**

# Beispiele

$$\exists x \forall y R(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$$

1.  $\exists x \forall y R(x, y)$  (A)
  2.  $\neg \forall y \exists x R(x, y)$  (A)
  3.  $\forall y R(a, y)$  (1)
  4.  $\neg \exists x R(x, b)$  (2)
  5.  $R(a, b)$  (3)
  6.  $\neg R(a, b)$  (4)
- x** (5, 6)

# Unentscheidbarkeit

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \exists x \forall y R(x, y)$$

1.  $\neg \exists x \forall y R(x, y)$  (A)
2.  $\neg \forall y R(a, y)$  (1)
3.  $\neg R(a, b)$  (2)
4.  $\neg \forall y R(b, y)$  (1)
5.  $\neg R(b, c)$  (2)
6.  $\neg \forall y R(c, y)$  (1)
7.  $\neg R(c, d)$  (2)

⋮

# Unentscheidbarkeit

- Ast ließe sich beliebig lange fortsetzen, ohne je auf einen Widerspruch zu stoßen
- generell gilt:
  - nur logische Folgerungen lassen sich im Wahrheitsbaum-Verfahren beweisen (Korrektheit des Verfahrens)
  - für jede logische Folgerung gibt es einen Beweis im Wahrheitsbaum-Verfahren (Vollständigkeit des Verfahrens)
  - es gibt aber keine Garantie, dass man eine Nicht-Folgerung als solche erkennt
  - Verfahren kann im Prinzip unendlich lange ohne Ergebnis laufen

# Unentscheidbarkeit

- es gibt auch kein anderes mechanisches Verfahren, das es erlaubt, Folgerungen von Nicht-Folgerungen garantiert zu unterscheiden (Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik)