Formale Methoden II

SS 2005

Universität Bielefeld

Teil 9, 25. Juni 2008

Gerhard Jäger

Natürliches Schließen für Prädikatenlogik

- direkte Erweiterung des Natürlichen Schließens für die Aussagenlogik
- vier neue Regeln: je eine Einführungs- und eine Beseitigungsregel für jeden Quantor
- es gibt Nebenbedingungen, die beachtet werden müssen

Natürliches Schließen: Regeln

Allquantor

$$\frac{\varphi}{\forall v \varphi}\,\forall E$$

- v ist beliebige Variable
- **Einschränkung:** v darf in keiner zugänglichen Annahme frei vorkommen!

$$\frac{\forall v \varphi}{[t/v]\varphi}\,\forall B$$

- v ist beliebige Variable und t beliebige Konstante oder Variable
- **Einschränkung:** wenn t eine Variable ist, darf sie in $[t/v]\varphi$ nicht gebunden sein

Natürliches Schließen: Regeln

Existenzquantor

$$\frac{[t/v]\varphi}{\exists v \varphi} \exists E$$

- v ist beliebige Variable und t beliebige Konstante oder Variable
- **Einschränkung:** wenn t eine Variable ist, darf sie in $[t/v]\varphi$ nicht gebunden sein

Natürliches Schließen: Regeln

Existenzquantor

$$\dfrac{\begin{array}{c}\exists v \varphi \\ \begin{array}{|c|}\hline [c/v]\varphi \\ \hline \vdots \\ \psi \\ \hline \end{array}\end{array}}{\psi}\ \exists B$$

- v ist beliebige Variable
- Einschränkungen:
  - c ist neue Konstante, die bisher im Beweis noch nicht vorkommt
  - c kommt nicht in ψ vor

Beispiele

$$\neg\exists x Px \vdash \forall x \neg Px$$

> $1. \neg\exists x P(x) \qquad (A)$
>
> > $2. Px \qquad (A)$
> >
> > $3. \exists x Px \qquad 2; \exists E$
>
> $4. \neg Px \qquad 2, 3, 1, 3; \neg E$
>
> $5. \forall x \neg Px \qquad 4; \forall E$

$$\forall x \neg Px \vdash \neg\exists x Px$$

> $1. \forall x Px \qquad (A)$
>
> > $2. \exists x Px \qquad (A)$
> >
> > > $3. Pa \qquad (A)$
> > >
> > > > $4. \forall x \neg Px \qquad (A)$
> > > >
> > > > $5. \neg Pa \qquad 4; \forall B$
> > >
> > > $6. \neg\forall x \neg Px \qquad 4, 5, 3, 5; \neg E$
> >
> > $7. \neg\forall x \neg Px \qquad 2, 3, 4;$
>
> $8. \neg\exists x Px \qquad 2, 1, 7; \neg E$

Beispiele

$\neg\forall x Px \vdash \exists x \neg Px$

1. $\neg\forall x Px$ — (A)
    2. $\neg\exists x\neg Px$ — (A)
        3. $\neg Px$ — (A)
        4. $\exists x\neg Px$ — $3;\exists E$
    5. $\neg\neg Px$ — $3,4,2;\neg E$
    6. Px — $\neg B$
    7. $\forall x Px$ — $6;\forall E$
8. $\neg\neg\exists x\neg Px$ — $2,7,1;\neg E$
9. $\exists x\neg Px$ — $\neg B$

$\exists x\neg Px \vdash \neg\forall x Px$

1. $\exists x\neg Px$ — (A)
    2. $\forall x Px$ — (A)
        3. $\neg Pa$ — (A)
            4. $\exists x\neg Px$ — (A)
            5. Pa — $2;\forall B$
        6. $\neg\exists x\neg Px$ — $4,3,5;\neg E$
    7. $\neg\exists x\neg Px$ — $1,2,3;\exists B$
8. $\neg\forall x Px$ — $2,3,1;\neg E$

Beispiele

$\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall x Px \wedge \forall x Qx$

$1. \forall x(Px \wedge Qx)$	(A)
$2. Px \wedge Qx$	$1; \forall B$
$3. Px$	$2; \wedge B1;$
$4. Qx$	$2; \wedge B2;$
$5. \forall x Px$	$3; \forall E$
$6. \forall x Qx$	$4; \forall E$
$7. \forall x Px \wedge \forall x Qx$	$5, 4, \wedge E$

$\exists x Px \rightarrow Qa \vdash \forall x(Px \rightarrow Qa)$

$1. \exists x Px \rightarrow Qa$	(A)
$2. Px$	(A)
$3. \exists x Px$	$2; \exists E$
$4. Qa$	$1, 2; \rightarrow B$
$5. Px \rightarrow Qa$	$2, 3; \rightarrow E$
$6. \forall x(Px \rightarrow Qa)$	$5; \forall E$

Abschließende Bemerkungen

- der Kalkül des Natürlichen Schließens ist korrekt und vollständig
- d.h., dass alle und nur die logisch gültigen Folgerungen bewiesen werden können
- die genannten Einschränkungen sind notwendig; andernfalls könnte man ungültige Folgerungen beweisen, z.B.
  - $\exists x Px \vdash \forall x Px$

Abschließende Bemerkungen

- wie für die Wahrheitsbaum-Methode gibt es auch für das Natürliche Schließen keine garantierte Lösungsstrategie; im Wesentlichen aus den selben Gründen (dank der Beseitigungsregeld für den Existenzquantor gibt es keine Obergrenze für die Anzahl der Konstanten in einem Beweis, und jede Konstante kann in der Beseitigungsregel für den Allquantor verwendet werden)